計算可能性理論（第 I 部 計算可能性）　改訂版 2020.04.01 revision a

東京都立大学 理 数理　　鈴木 登志雄

目 次

2　帰納的関数

2.1　帰納的関数の定義

特に断りのない限り，関数への入力（以下の x_1 や x_2 など）は自然数であるとし，関数の値も自然数であるとする．

定義 2.1 以下の 3 パターンいずれかに該当する関数を**初期関数**という．

- **定数関数** $C_a(x_1,\ldots,x_n)=a$（ただし a は入力の値によらない自然数.）
- **後者関数** $S(x)=x+1$（$x+1$ のことを x' とも書く.）
- **射影関数** $U_i^n(x_1,\ldots,x_n)=x_i$

定義 2.2 初期関数から出発し，以下の操作 1,2 を有限回（0 回も許す）行って得られる関数を *primitive recursive function*（**原始帰納的関数，原始再帰的関数**）という．また，初期関数から出発し，以下の操作 1,2,3 を有限回（0 回も許す）行って得られる関数を *recursive function*（**帰納的関数，再帰的関数**）という．

1. **合成**

   関数 g と $h_1, \ldots, h_m$ を用いて f を次のように定義する.

   $f(x_1, \ldots, x_n) = g(h_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, h_m(x_1, \ldots, x_n))$

2. **原始帰納法（原始再帰法）**

   定数 a と関数 h を用いて f を次のように定義する.
   $$\begin{cases} f(0) = a & \text{（定数）} \\ f(y') = h(y, f(y)) \end{cases}$$

   関数 g と h を用いて f を次のように定義する（ただし $n \geq 2$ の場合に限る）.

   $$\begin{cases} f(0, x_2, \ldots, x_n) = g(x_2, \ldots, x_n) \\ f(y', x_2, \ldots, x_n) = h(y, f(y, x_2, \ldots, x_n), x_2, \ldots, x_n) \end{cases}$$

3. **全域最小化**

   各々の自然数 $x_1, \ldots, x_n$ に対して自然数 y が存在して $g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ となるとする（このとき，g は正則性条件をみたすという）. このような g を用いて f を次のように定義する.

   $f(x_1, \ldots, x_n) = \min\{y : g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0\}$

例題 2.1 自然数の加算 $x + y$，乗算 xy，階乗 $x!$ がいずれも原始帰納的関数であることを示せ.

解

$x + y$

$$\begin{cases} x + 0 & = x \\ x + y' & = (x + y)' \end{cases}$$

xy

$$\begin{cases} x0 & = 0 \\ xy' & = xy + x \end{cases}$$

$x!$

$$\begin{cases} 0! & = 1 \\ (x')! & = x'(x!) \end{cases}$$

□

問 2.1 以下の関数が原始帰納的であることを示せ.

(1) 指数
（ただし $0^0 = 1$ と約束する.）

x^y

(2) 符号

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 0 & \text{If } x = 0 \\ 1 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

(3) ゼロかどうかの判定

$$\mathrm{is\_zero}(x) = \begin{cases} 1 & \text{If } x = 0 \\ 0 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

(4) 前者関数

$$\mathrm{pd}(x) = \begin{cases} 0 & \text{If } x = 0 \\ x - 1 & \text{Otherwise} \end{cases}$$

(5) 固有差（引き算もどき）

$$x \dot{-} y = \begin{cases} 0 & \text{If } x \leq y \\ x - y & \text{Otherwise} \end{cases}$$

(6) 2 で割った剰余

$x \mod 2$

2.2 帰納的述語と帰納的集合

高校数学で条件とよんでいたものを，大学数学では *predicate*（**述語**）ともいう. 真を 1，偽を 0 で表し，与えられた k 変数述語を $\mathbb{N}^k$ から $\{0, 1\}$ への関数であるとみなしたものを，元の述語の *characteristic function*

（特性関数）という．特性関数が（原始）帰納的であるとき，元の述語を（原始）帰納的述語という．また，$\mathbb{N}$ の部分集合 A が与えられたとき，自然数 x に対する述語「$x \in A$」の特性関数を A の特性関数という．集合の特性関数が（原始）帰納的であるとき，元の集合を（原始）帰納的集合という．たとえば，奇数全体の集合は原始帰納的集合である．なぜなら，その特性関数は $x \mod 2$ であり，問 2.1 (6) により，この関数は原始帰納的だからである．

例題 2.2 述語 $P(x_1, \ldots, x_n)$ が（原始）帰納的述語であるとき，その否定 not $P(x_1, \ldots, x_n)$ も（原始）帰納的であることを示せ．

解 $P(x_1, \ldots, x_n)$ の特性関数を $\chi_P(x_1, \ldots, x_n)$ で表す．問 2.1 (3) の関数 is_zero を用いて， not $P(x_1, \ldots, x_n)$ の特性関数を is_zero$(\chi_P(x_1, \ldots, x_n))$ と表すことができる．問 2.1 (3) の答えにより，この特性関数は（原始）帰納的である． □

別解 $P(x_1, \ldots, x_n)$ の特性関数を $\chi_P(x_1, \ldots, x_n)$ で表す．問 2.1 (5) の関数 $\dot{-}$ を用いて， not $P(x_1, \ldots, x_n)$ の特性関数を $1 \dot{-} \chi_P(x_1, \ldots, x_n)$ と表すことができる．問 2.1 (5) の答えにより，この特性関数は（原始）帰納的である． □

問 2.2 述語 $P_1(x_1, \ldots, x_n)$, $P_2(x_1, \ldots, x_n)$ が（原始）帰納的述語，関数 $f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, \ldots, x_n)$ が（原始）帰納的関数であるとき，以下の述語および関数が（原始）帰納的であることを示せ．

(1) 連言　　(2) 選言

$P_1(x_1, \ldots, x_n)$ and $P_2(x_1, \ldots, x_n)$　　$P_1(x_1, \ldots, x_n)$ or $P_2(x_1, \ldots, x_n)$

(3) 場合分け

$$f_3(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) & \text{If } P_1(x_1, \ldots, x_n) \text{ holds} \\ f_2(x_1, \ldots, x_n) & \text{Otherwise} \end{cases}$$

2.3 制御構造

原始帰納法と全域最小化が，C 言語や Java 言語の制御構造とどのように関係しているかをみよう．

例 2.3 締め切りつきのループを用いて原始帰納法を実現することができる．例として以下の f を考える．

$$\begin{cases} f(0) = a \quad \text{（定数）} \\ f(y') = h(y, f(y)) \end{cases}$$

以下のアルゴリズムによって $f(x)$ を計算することができる．

```
int f ( int x ){
  int y, z = a;
  for ( y = 0; y < x; ++y ){ z = h(y, z); }
  return z;
}
```

例 2.4 停止が保証された（しかし締め切りは明示されていない）ループを用いて全域最小化を実現することができる．例として，$g(x,y)$ は正則性条件をみたすものとして，以下の f を考える．$f(x) = \min\{y : g(x,y) = 0\}$ 以下のアルゴリズムによって $f(x)$ を計算することができる．

```
int f ( int x ){
  int y = 0, z;
  z = g( x, y );
  while ( z != 0 ){ ++y; z = g( x, y ); }
  return y;
}
```

より詳しくは [鹿島 2008] 参照.

3 チューリング マシン

3.1 チューリング マシンの定義

一般に，集合 A のある部分集合から集合 B への関数を，A から B への**部分関数**という．とくに定義域が A と一致する場合は A から B への**全域的関数**という．

定義 3.1 [田中 1997, p.67] $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0 \rangle$ が以下をみたすとき，M をチューリング マシンという．

- Q は有限集合である．Q の元を**（有限）状態**という．
- $\Sigma = \{1, B\}$．B を空白文字といい，また，Σ を**アルファベット**という．$Q \cap \Sigma = \emptyset$ が成り立つ．
- q_0 は Q の要素であり，**初期状態**とよばれる．
- δ は $Q \times \Sigma$ から $\Sigma \times \{L, C, R\} \times Q$ への部分関数である．δ を**動作関数**という．

以下ではチューリング マシンをしばしば Tm と略す.

定義 3.2 $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0 \rangle$ が Tm であるとする．

1. 文字列 $a_1 \cdots a_n : q$ が以下をみたすとき，この文字列を M の**時点表示**という.「Σ の要素の有限列（長さ 1 以上）があって，その 1 か所だけに下線をつけたものが $a_1 \cdots a_n$ になっている」この，下線のついた文字を**ヘッドに指された文字**という．q は Q の要素であり，**現在の状態**とよばれる．
2. 時点表示 $a_1 \cdots a_n : q$ と $Ba_1 \cdots a_n : q$ と $a_1 \cdots a_n B : q$ は同値であるとする．すなわち，$a_1 \cdots a_n$ の部分の左右に有限個の空白記号を付け加えたり，削除したりして得られる時点表示は，元の時点表示と同値であるとする．

上記二つの定義について，非公式な（本音の）解釈は以下の通りである．Tm のハードウェアは，本体と，マス目（セル）に区切られて左右に無限に伸びたテープ，ヘッドからなる．時間は離散的に進む．

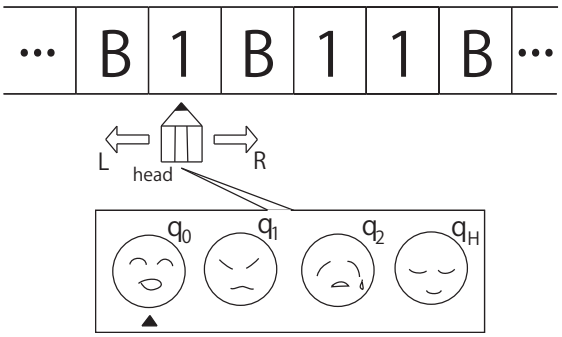
チューリング マシンはこんな部品でできている.

マス目に区切られたテープ

使える文字はB（空白記号）のほか,

指定された有限個（この例では 1 だけ）.

空白以外の文字はテープ上に有限回出現する.



ヘッド.

各時点で特定のマス目を指す.

読み出しと書き込みができる.

左または右に 1 マスずつ動ける.

状態.

有限個の状態をもつ（この例では 4 個）.

各時点で「現在の状態」がある（▲）.

q_0 は初期状態.

プログラム本体.

下記参照.

プログラム本体の例（この 6 行で一つのプログラム）

もし状態が q_0 でヘッドに指された文字が B なら 1 マス右へ行き，状態を q_1 にせよ.

もし状態が q_0 でヘッドに指された文字が 1 なら 1 マス右へ行き，状態を q_1 にせよ.

もし状態が q_1 でヘッドに指された文字が B なら 1 マス右へ行け.

もし状態が q_1 でヘッドに指された文字が 1 なら 1 マス右へ行き状態を q_2 にせよ.

もし状態が q_2 でヘッドに指された文字が B なら 1 マス右へ行き状態を q_1 にせよ.

もし状態が q_2 でヘッドに指された文字が 1 なら B に書き換え，状態を q_H にせよ.

$M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0 \rangle$ が Tm であるとしよう．このとき動作関数 δ がプログラム本体の役割を果たす.

$$\delta(q, a) = \langle b, L, r \rangle$$

という等式を以下の命令と解釈する.

```
if ( 現在の状態 == q かつ ヘッドに指された文字 == a ) {
    ヘッドに指された文字を b に書き換え,
    ヘッドを一つ左のマス目に移動し,
    現在の状態を r に変更せよ
}
```

同様に，$\delta(q,a) = \langle b,R,r\rangle$ は上記の「左のセルに移動し」の部分を「右のセルに移動し」で置き換えた命令を表す．また，$\delta(q,a) = \langle b,C,r\rangle$ は当該部分を「ヘッドを動かさず」で置き換えた命令と解釈される．「$\delta(q,a) = \langle b,X,r\rangle$」の形の命令を 1 回実行することを 1 ステップという．

時点表示は，ある瞬間のテープの様子とヘッドの位置と状態を表す．テープ文字が書いていないところはすべて空白文字 B で埋め尽くされているものと解釈する．たとえば，上記枠内イラストは，時点表示 $B\underline{1}B11B : q_0$ で表せる．また，時点表示 $BBB\underline{1}B11BBB : q_0$ で表すこともできる．

計算開始の瞬間において，状態は初期状態 q_0 である．ヘッドが置かれた文字を a として，$\langle q,a\rangle$ が δ の定義域に属しているなら 1 ステップの処理を行う．この処理を可能な限り続ける．ある瞬間に $\langle q,a\rangle$ が δ の定義域に属さなくなったとき，M は停止する．M の計算がいつまでも停止しない（発散）場合もあり得る．

建前上は，物理的な時間の概念を使わずに計算過程を文字列として定義する．

定義 3.3 $M = \langle Q,\Sigma,\delta,q_0\rangle$ が Tm であるとする．

1. 時点表示 $\alpha = a_1\cdots a_n : q$, $\beta = b_1\cdots b_m : q'$ に対して以下の条件が成り立つとき，「α は M の 1 ステップによって β に移行する」という．

   条件：α においてヘッドに指された文字を a_s とする．このとき，順序対 $\langle q,a_s\rangle$ が δ の定義域に属し，$\delta(q,a_s) = \langle b,X,r\rangle$ とおくと，$r = q'$ かつ，以下のどれかが成り立つ．

   - $X = C$ かつ，α において $\underline{a_s}$ となっている部分を $\underline{b}$ に書き換え q を r に書き換えて得られる文字列が β と同値である．
   - $X = L$ かつ，$s = 1$ かつ，α において $\underline{a_1}$ となっている部分を $\underline{Bb}$ に書き換え q を r に書き換えて得られる文字列が β と同値である．
   - $X = L$ かつ，$s \geq 2$ かつ，α において $a_{s-1}\underline{a_s}$ となっている部分を $\underline{a_{s-1}b}$ に書き換え q を r に書き換えて得られる文字列が β と同値である．
   - $X = R$ かつ，$s = n$ かつ，α において $\underline{a_n}$ となっている部分を $\underline{bB}$ に書き換え q を r に書き換えて得られる文字列が β と同値である．
   - $X = R$ かつ，$s < n$ かつ，α において $\underline{a_s a_{s+1}}$ となっている部分を $\underline{ba_{s+1}}$ に書き換え q を r に書き換えて得られる文字列が β と同値である．

2. 時点表示有限個の列 $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ において以下二つの条件が成り立つとき，M は α_k で停止するといい，列 $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ を M の k ステップの計算（過程）という．

   - 各 $j < k$ に対して，α_j は M の 1 ステップによって α_{j+1} に移行する．
   - α_k が　$\cdots\underline{a}\cdots : p$ （ただし $\langle p,a\rangle$ は δ の定義域に属さない）の形をしている．

3.2　チューリング計算可能関数

自然数 n の 1 進コードとは，記号 1 を $n+1$ 個並べたものとする．たとえば 0 のコードは 1，3 のコードは 1111 である．

定義 3.4　1. *Tm* M が関数 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ を計算するとは，任意の $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle \in \mathbb{N}^n$ に対して以下が成り立つことをいう（ただし q_0 は M の初期状態，q_H は停止状態であるとする）．M の計算過程 $\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ が存在して，α_0 は

$$\underset{x_1+1\text{個}}{B^* \quad 1\cdots1} \quad B \quad \underset{x_2+1\text{個}}{1\cdots1} \quad B\cdots B \quad \underset{x_n+1\text{個}}{1\cdots1} \quad \underline{B}B^* : q_0 \tag{1}$$

であり，かつ，α_k は以下の形をしている．ただし B^* は B が 0 個以上並んだものを表す．

$$\underset{x_1+1\text{個}}{B^* \quad 1\cdots1} \quad B \quad \underset{x_2+1\text{個}}{1\cdots1} \quad B\cdots B \quad \underset{x_n+1\text{個}}{1\cdots1} \quad B \quad \underset{f(x_1,\ldots,x_n)+1\text{個}}{1\cdots1} \quad \underline{B}B^* : q_H$$

2. 関数 $f : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$ が**チューリング計算可能である**とは，f を計算する Tm が存在することをいう．

なお，上記 (1) を $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n \rangle}/q_0$ で表すことがある [田中 1997, p.73].

4　帰納的関数とチューリング計算可能関数の関係

4.1　帰納的関数を計算するチューリング マシン

定理 4.1 [田中 1997, 定理 3.2]　帰納的関数はチューリング計算可能である．

上記定理の証明を，何段階かに分けて以下で行う．本節では，とくに断りのない限り関数とは全域的関数を表すものとする．

問 4.1 次のような Tm が存在することを示せ．ヘッドを現在位置から 1 マス以上左へ動かして，最初に出会う $B1$ の 1 のところで停まる．もし $B1$ に出会わなければいつまでも左へヘッドを進ませて停まらない．

考え方 § 3.1 の囲み記事「チューリング マシンはこんな部品でできている」と同様.

例題 4.1 次のような Tm が存在することを示せ．どんな自然数 x に対しても，時点表示

$$Ba_1\cdots a_nB \quad \underbrace{1\cdots1}_{x+1\text{個}} \quad \underline{B} : q_0$$

から計算を開始すると有限ステップの後，以下の時点表示で停まる．

$$Ba_1\cdots a_nB \quad \underbrace{1\cdots1}_{x+1\text{個}} \quad B \quad \underbrace{1\cdots1}_{x+1\text{個}} \quad \underline{B} : q_H$$

略解　作業の流れは以下の通りである．まず 1 のブロックの左端に目印を付ける．次に 1 のブロックの左端から順番に，1 を右側の新ブロックへ移送する．配送済みの記録として，1 があった場所は B に変えておく．これを繰り返して，元々の 1 のブロックを右側の新ブロックの場所へすっかりコピーする．最後に終了処理として，元のブロックを復元する．その際，最初に付けた左端の目印を利用する．では，この一連の作業をチューリングマシンとして実現できることを見ていこう．

状態 q_0 からの動作：問 4.1 と同様にしてチューリングマシンを設計し，まず次のような動作をさせる．左へ行って最初の $xB1$ を探す（上の例では $x = a_n$ であり，その値は 1 かもしれないし B かもしれない）．より正確に言えば，この動作を行う前にヘッドがあった位置よりも真に左側に x があり，そこから $xB1$ となっているもののうち，最も右にあるものを探す．みつからなければ永久に左へ行く（以下ではこの種の断り書きは省

略する）．みつかれば $xB1$ を $1B1$ に書き換え，$1B1$ の右側の 1 で停まって状態 q_1 になる．このとき x が 1 であったかどうかは状態によって記憶する．つまり x が 1 なら状態 $q_1^{(1)}$，B なら状態 $q_1^{(B)}$ とする．このときの状態に応じて，後述の（∗）の時点まで,「状態を q_i にする」という部分は厳密には $q_i^{(1)}$ か $q_i^{(B)}$ のいずれかにするのであるが，煩雑なので省略する．また，q_0 から q_1 に至る間にいくつかの状態をとるが，それらについての説明も省略する．

たとえば最初の時点表示が

$$Ba_1 \cdots a_n B111\underline{B} : q_0$$

であれば，ここまでの動作で以下の時点表示に至る．

$$Ba_1 \cdots 1B\underline{1}11B : q_1$$

状態 q_1 からの動作：ヘッドが指す文字を B に書き換え，この B を 1 番目として右へ行って 3 番目の B をみつけ，それを 1 に書き換える．次に左へ行って最初に出会う B をみつけ，そのさらに 1 マス左へ行く．そこが 1 のときは状態 q_2，B のときは状態 q_3 になる．

上記の例の続きは，

$$Ba_1 \cdots 1BB11B\underline{1}$$

を経て以下の時点表示に至る．

$$Ba_1 \cdots 1BB1\underline{1}B1 : q_2$$

状態 q_2 からの動作：左へ行って最初に出会う $B1$ をみつけ（もともとヘッドが 1 を指していてその左が B の場合は，その $B1$），その $B1$ の 1 で停まり，状態を q_1 に戻す．

上記の例の続きは，まず

$$Ba_1 \cdots 1BB\underline{1}1B1 : q_1$$

となる．ここで q_1 からの動作を行うので，上記と同様にして

$$Ba_1 \cdots 1BBB1B1\underline{1}$$

を経て

$$Ba_1 \cdots 1BBB\underline{1}B11 : q_2$$

となる．ここで q_2 からの動作を行うので，上記と同様に，

$$Ba_1 \cdots 1BBB\underline{1}B11 : q_1$$

となり，続いて q_1 からの動作を行うので，

$$Ba_1 \cdots 1BBBBB11\underline{1}$$

を経て以下の時点表示に至る．状態が q_3 になることに注意．

$$Ba_1 \cdots 1BBB\underline{B}B111 : q_3$$

状態 q_3 からの動作：ヘッドが指す文字を 1 に書き換える．左へ行って最初の $1B$ をみつける．第 1 段落で出会った x が B であれば（これは状態によって記憶している）$1B$ を BB に書き換える（∗）．これで，最初に a_nB だった箇所が元通りになる．a_n の右隣の B から 1 マス右へ行く．そこが 1 でなければ，1 に出会うま

で，B を 1 に書き換えながら右へ進む．1 に出会ったら右へ進み，2 回目に出会う B で，状態を q_H にして停止する．

上記の例の続きは，

$$Ba_1 \cdots \underline{a_n} BBB1B111$$

さらに

$$Ba_1 \cdots a_n B111B111\underline{B} : q_H \downarrow$$

となる．ここで計算が終わる． □

さて，n を正の整数とするとき，アルファベットを $\Sigma_n = \{B, 0, 1, \ldots, n\}$ に拡張したＴｍを考える．この拡張マシンに基づく計算可能性を容易に定義できる．

補題 4.2 M_2 は，アルファベットを $\Sigma_1 = \{B, 0, 1\}$ に拡張したＴｍであるとする．このとき，普通の（すなわち，アルファベットが $\Sigma = \{B, 1\}$ である）Ｔｍ M_1 が存在して，M_1 によって M_2 を模倣できる．ただし，Σ_1 の文字を以下の規則で Σ の文字列に変換して模倣を行うものとする：$B \mapsto BB, 0 \mapsto B1, 1 \mapsto 1B$.

証明の概略 拡張マシン M_2 の各状態 q に対して，文字コード（たとえば B のコードは BB）の左半分を読んでいる状態 q' と右半分を読んでいる状態 q'' を導入して M_1 を構成する． □

同様の議論により，以下を得る．

補題 4.3 n を正の整数とする．アルファベットを $\Sigma_n = \{B, 0, 1, \ldots, n\}$ に拡張したＴｍで計算可能な関数は，アルファベットが $\Sigma = \{B, 1\}$ である普通のＴｍによって計算可能である（ただし，必要に応じて補題 4.2 と同様の文字コードを設定する）．

次に多テープ多ヘッドＴｍを考える．テープは有限本あるものとする．各テープごとに一つずつヘッドを割り当てる．状態はすべてのヘッドで共有する．すべてのヘッドがテープ文字を読み込み，それらの結果に応じて，各ヘッドが書き込みと移動を行って次の状態を指定するまでを 1 ステップとする．たとえばヘッド A とヘッド B が読み込んだ文字が何であるかによってヘッド C の動作を変えることも許す．

補題 4.4 n, m を正の整数とする．アルファベットを $\Sigma_n = \{B, 0, 1, \ldots, n\}$ に拡張し，さらにテープの本数を m 本にに拡張したＴｍで計算可能な関数は，アルファベットが $\Sigma = \{B, 1\}$ でテープの本数が 1 本である普通のＴｍによって計算可能である．

証明の概略 チューリング計算可能性の概念を不変にしたまま，Ｔｍのアルファベットを任意の有限個にしてもよいので，句読点や区切り記号をアルファベットに付け加えてもよい．また，ヘッドに指された B を表す文字 $\underline{B}$ や，ヘッドに指された 1 を表す文字 $\underline{1}$ をアルファベットに付け加えてもよい．このようにして，複数のテープについての時点表示を 1 本のテープの中に表現することができる． □

補題 4.5 ・定数関数 $C_a(x_1, \ldots, x_n) = a$ はチューリング計算可能である．
・後者関数 $S(x) = x'$ はチューリング計算可能である．
・射影関数 $U_i^n(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ はチューリング計算可能である．

証明の概略 具体的にＴｍを構成することにより示せばよい． □

補題 4.6 チューリング計算可能な関数の合成関数はチューリング計算可能である．

証明の概略　例として $g_1(x_1), g_2(x_1), h(x_1, x_2)$ がチューリング計算可能であるとして，合成関数 $f(x) = h(g_1(x), g_2(x))$ について考察する．4 テープＴｍによって以下のような計算を行う．入力 x のコードは第 1 テープに書くものとする．第 2 テープと第 3 テープに x のコードをコピーする．第 2 テープ上で $g_1(x)$ を計算し，第 3 テープ上で $g_2(x)$ を計算する．第 4 テープに $\langle g_1(x), g_2(x)\rangle$ のコードを書き込み，$h(g_1(x), g_2(x))$ を計算する．その結果を第 1 テープにおける x の右隣に（1 マス空白をはさんで）コピーする．この 4 テープＴｍは $f(x)$ を計算する．よって補題 4.4 により，$f(x)$ はチューリング計算可能である．　□

補題 4.6 と同様にして，以下二つの補題を証明できる．

補題 4.7 チューリング計算可能な関数のみを用いて原始帰納法によって定義された関数はチューリング計算可能である．

補題 4.8 チューリング計算可能な関数のみを用いて 全域最小化によって定義された関数はチューリング計算可能である．

定理 4.1 の証明の概略　補題 4.5，4.3，4.4，4.6，4.7，4.8 と帰納法による．　□

4.2　クリーネの標準形定理

以下では，話を簡単にするため,「時点表示 $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle}/q_0$ から M の計算を開始すると，有限回の動作の後に $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n, z\rangle}/q_H$ （ただし z は自然数で，q_H は M の停止状態）の形の時点表示に到って，そこで M が停止する」ということを「M は入力 $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ に対して停止する」といおう．また，上の z を「入力 $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ に対する M の出力」といおう．

補題 4.9 $M = \langle Q, \Sigma, \delta, q_0\rangle$ はチューリング マシン（ただし $\Sigma = \{1, B\}$）であり，n, k は正の整数であり，かつ $x_1, \cdots, x_n$ は自然数であるとする．

(1) M が入力 $\langle x_1, \cdots, x_n\rangle$ に対して停止するための必要十分条件は，以下の性質 1 を持つような文字列の列 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ が存在することである（各々の α_j が文字列）．

（性質 1 ）:「α_0 は　(0 個以上の B) $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n\rangle}/q_0$ (0 個以上の B)　の形をしており，α_k は (0 個以上の B) $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n, z\rangle}/q_H$ (0 個以上の B)　の形をしており，かつ　$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$　は M の計算である.」

(2) $\alpha_0, \alpha_1, \cdots$ および α_k は任意の文字列であるとする．これらの文字列からなる列

$$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \tag{2}$$

が上記の性質 1 を持つための必要十分条件は，(2) が以下のアルゴリズムによって受理されることである．なお，このアルゴリズムは（C 言語とは少し違う）擬似コードで書いてある．

---

begin (アルゴリズム T_n')
input チューリング マシン（のプログラム）M,
　　自然数 $x_1, \cdots, x_n$,
　　文字列の列 $y = (\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k)$.

if α_0 が　　(0 個以上の B) $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n \rangle}/q_0$ (0 個以上の B)　　の形でない
then reject /* 入力を拒否して終了する */**end-if**

if α_k が　　(0 個以上の B) $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n, z \rangle}/q_H$ (0 個以上の B)
（ただし z は自然数であり，q_H は M の停止状態）　の形でない
then reject **end-if**

for $j = 0, \cdots, k-1$
　if M の 1 ステップの動作によって時点表示 α_j から時点表示 α_{j+1} へ移行しない
　then reject **end-if**
end-for
/* 以上すべてのテストに合格したら */
accept /* 入力を受理して終了する */
end

補題 4.9 の証明は容易であり，省略する．

補題 4.10 (1) 原始帰納的関数 U をうまく定めると，任意の正の整数 n に対して原始帰納的関数 T_n を定め，以下が成り立つようにできる．n 変数の入力をもつ Tm M が与えられ，M は任意の入力 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in \mathbb{N}^n$ に対して停止するものとする．このとき，任意の自然数 $x_1, \cdots, x_n$ に対して以下が成り立つ．

$$M(x_1, \cdots, x_n) = U(\min\{y : T_n(M, x_1, \cdots, x_n, y) = 0\})$$

ただし，左辺は入力 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ に対する M の出力を表す．また，右辺の M は（あらかじめ決めた文字コードによって）M を自然数に変換したものを表す．

(2) n 変数の任意の帰納的関数 f に対して，f を計算する Tm M をとると以下が成り立つ．ただし U と T_n は (1) のものである．

$$f(x_1, \cdots, x_n) = U(\min\{y : T_n(M, x_1, \cdots, x_n, y) = 0\})$$

(3) 全域的なチューリング計算可能関数は帰納的関数である．

証明の概略　　(1) 補題 4.9 において，$y = \langle \alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k \rangle$ から z を読み出す関数を U とおく．関数 U は y から α_k を読み出し，さらに α_k から z を読み出す関数であり，n と無関係なアルゴリズムによって計算できる．

M は題意の条件をみたす Tm，$x_1, \cdots, x_n$ は任意の自然数とする．補題 4.9 により，M が入力 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ に対して停止するための必要十分条件は，

$$\exists y \ T_n' \text{ は } \langle M, x_1, \cdots, x_n, y \rangle \text{ を受理する}$$

である．そして，このような y に対して，$z = U(y)$ が成り立つ．さて，適当な文字コードを定めておけば，チューリングマシンのプログラムを書くのに必要な記号はすべて 2 進数だと思ってよく，結局，上記の M や y も自然数だと思ってかまわない[1]．そこで関数 T_n を以下のように定める．

$$T_n(M, x_1, \cdots, x_n, y) = \begin{cases} 0 & (T_n' \text{ が } (M, x_1, \cdots, x_n, y) \text{ を受理するとき}) \\ 1 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

[1] 本当は M や y そのものと，M や y に対応する自然数（コード）を区別すべきである．厳密な議論は [En2001, §3.4] や [Sh2001, §7] などを参照．

アルゴリズム T_n' において使われているループは for $j = 0, \cdots, n$ の形のものだけであり，while ループが用いられていないことに注意すると，関数 T_n が原始帰納的関数であることを証明できる．また，同様の理由により，U も原始帰納的関数である．

以上により (1) が成り立つ．

(2) 「Tm M が f を計算する」の定義と上記 (1) により (2) が成り立つ．

(3) 「f がチューリング計算可能」の定義と上記 (1) により (3) が成り立つ． □

定理 4.1 と補題 4.10 により，次の定理を得る．

定理 4.11 [田中 1997, 定理 3.3] 全域的なチューリング計算可能関数全体の集合と全域的な帰納的関数全体の集合は一致する．

部分関数に対しても全く同様の議論が成り立つ．

定義 4.12 [田中 1997, p.76] (1) $\mathbb{N}^n$ の部分集合から $\mathbb{N}$ への関数を（n 変数の）**部分関数**という．

(2) 帰納的関数の定義 [田中 1997, p.63] において，(VI) の g の正則性条件を取り去った条件を考え，それを「(VI ′) 最小化演算」と呼ぼう．詳しくは以下の通りまず，自然数の集合の最小値をとる演算 min を修正して，μ 作用素を導入する．

自然数 $x_1, \ldots, x_n$ に対して，ある自然数 k があって

- すべての自然数 $z \leq k$ に対して $(x_1, \ldots, x_n, z)$ が g の定義域に属し，
- すべての自然数 $z < k$ に対して $g(x_1, \ldots, x_n, z) \neq 0$，かつ
- $g(x_1, \ldots, x_n, k) = 0$

となるとき，$\mu y\ (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ の値はこの k と定める．このような k がないときは $\mu y\ (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ は未定義とする．

最小化

与えられた関数 g を用いて f を次のように定義する．$f(x_1, \ldots, x_n) = \mu y\ (g(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$

(I) 定数関数，(II) 後者関数，(III) 射影関数を初期関数として，(IV) 合成演算，(V) 原始帰納法演算および (VI ′) 最小化演算を有限回（0 回も可）施すことによって得られる関数を**部分帰納的関数**という．

(3) n 変数の部分関数 f が**チューリング計算可能な部分関数**であるとは，あるチューリング マシン M が存在して，任意の n 組 $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle \in \mathrm{N}^n$ に対して以下のふたつの条件が成り立つことをいう．

- $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ が f の定義域に属するとき，時点表示 $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n \rangle}/q_0$ から M の計算を開始すると，有限回の動作の後に時点表示 $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n) \rangle}/q_H$ に到って，そこで M は停止する．ここで，q_0 は M の初期状態，q_H は M の停止状態である．
- $\langle x_1, \cdots, x_n \rangle$ が f の定義域に属さないとき，時点表示 $\overline{\langle x_1, \cdots, x_n \rangle}/q_0$ から M の計算を開始すると，M は停止しない．

定理 4.13 (1) [田中 1997, 定理 3.3] チューリング計算可能な部分関数全体の集合と部分帰納的関数全体の集合は一致する．

(2)（クリーネの標準形定理，[En2001, §3.6]，[Sh2001, §8]）n 変数の任意の部分帰納的関数 f に対して

$$f(x_1, \cdots, x_n) = U(\ \mu y(T_n(M, x_1, \cdots, x_n, y) = 0)\ ) \tag{3}$$

が成り立つ．ここで，M は f を計算するチューリング マシン（のプログラムを自然数に変換したもの）．また，左辺と右辺の関数の定義域は一致する．

4.3 停止問題

以下では，全域的帰納的関数のことを単に計算可能関数とよぼう．チューリング マシン（のプログラムを自然数に変換したもの）M と自然数 x を入力として受け取り，M が入力 x に対して停止するかを判定する問題を（チューリング マシンの）**停止問題**という．

定理 4.14（[Pa1994, p.59, Theorem 3.1], [En2001, §3.6]，[Sh2001, §10]）停止問題は計算可能ではない．より詳しく言えば，以下によって定義される関数 f は計算可能ではない．

$$f(M, x) = \begin{cases} 1 & (M \text{ が入力 } x \text{ に対して停止するとき}) \\ 0 & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

証明の概略　背理法の仮定として上記の関数 f が計算可能だとする．すると任意の入力 x に対して次のように動作する，チューリング マシン（のプログラムを自然数に変換したもの）M がある．

$f(x, x) = 1$ のとき，M は入力 x に対して停止しない．
$f(x, x) = 0$ のとき，M は入力 x に対して 1 を出力して停止する．

すると

$f(M, M) = 1$ のとき，M は入力 M に対して停止しない．
$f(M, M) = 0$ のとき，M は入力 M に対して 1 を出力して停止する．

となる．ゆえに

$f(M, M) = 1$ のとき，$f(M, M) = 0$.
$f(M, M) = 0$ のとき，$f(M, M) = 1$

となって矛盾する．□

上記の証明は，いわゆる対角線論法の一種である．

5 計算困難性の度合いの比較

計算可能性の概念を少し緩めた条件について考える．また，そうした条件をみたす集合どうしについて，計算困難性の度合いを比較する尺度を考えよう．本節ではアルファベットとして $\{0, 1, B\}$ を用いる（B は空白記号）．以下では細かいことは気にせず，自然数全体の集合と $\{0, 1\}^*$ を区別せずに論じる．

5.1 Recursively enumerable 集合

定義 5.1 [渡辺 1992, p.64]

1. プログラム（チューリング計算機）M と集合 $L \subseteq \{0,1\}^*$ が次の関係をみたすとき，M は L を**決定する**（**判定する**）という．すべての $x \in \{0,1\}^*$ に対し，

$$\begin{cases} x \in L \to M(x) = 1 \\ x \notin L \to M(x) = 0 \end{cases}$$

2. 以下が成り立つとき，M は L を**半決定する**という．すべての $x \in \{0,1\}^*$ に対し，

$$\begin{cases} x \in L \to M(x) = 1 \\ x \notin L \to M(x) \uparrow \text{（停止しない）} \end{cases}$$

ここででもう一つ，次のような条件を考えよう．

$(*)$ すべての $x \in \{0,1\}^*$ に対し，　$x \in L \leftrightarrow M(x) = 1$

上の条件 $(*)$ において $x \notin L$ の場合，M は停止しないかもしれないし，停止はするが 1 以外の出力をするかもしれない．与えられた言語 L に対し，以下の関係が成り立つ．

定義 5.1 (1) の条件をみたす M が存在する $\Rightarrow$ 定義 5.1 (2) の条件をみたす M が存在する
$\Leftrightarrow$ $(*)$ をみたす M が存在する

最初の $\Rightarrow$ と，後の（$\Leftrightarrow$ の）$\Leftarrow$ を示すには，1 以外を出力しようとしたら待ったをかけ，暴走するようにマシンを改造すればよい．さて，定義 5.1 の用語については様々な方言がある．例をあげよう（表 1）．

	定義 5.1 (1)	定義 5.1 (2)	$(*)$
本稿	決定する（判定する）	半決定する	
Sipser [Si2008b, 164-165]	判定する（decide）		認識する（recognize）
[荻原 2006, p.14]	受理する（accept）		認識する（recognize）
[鹿島 2008, p.107]	決定する	半決定する	
[田中 1997, p.77]	受理する		
[渡辺 1992, 62-64]	認識する	半認識する	認識する（注 1 ）
本稿旧版（2014）	決定する（認識する）	受理する（半認識する）	

表 1: 決定・判定・認識などについての方言

（注 1 ）[渡辺 1992] の該当箇所ではどんな入力に対しても 1 または 0 を出力するプログラムだけを考えているので，この場合本書定義 5.1 (1) の条件と $(*)$ は同値になる．

「決定する」と「判定する」の違いは，単に「decide」の訳し方の違いに過ぎないと考えられる．

定理 5.2 集合 $L \subseteq \{0,1\}^*$ に対して，以下は同値．

1. L を半決定するプログラム M が存在する．

2. ある部分帰納的関数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ が存在して，f の定義域が L に等しい．

3. ある全域的帰納的関数 $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ が存在して，f の像 $\{f(x) : x \in \{0,1\}^*\}$ が L に等しい．

4. ある帰納的述語 $R(-,-)$ があって，$L = \{x \in \{0,1\}^* : \exists w \in \{0,1\}^*\ R(x,w)\}$．

5. L は 0 型言語である（すなわち，ある句構造文法 G が存在して，G が L を生成する）．

証明の概略　L が有限集合のときは (1) から (5) までのすべてが成り立つと容易にわかる．以下，L が無限集合である場合のみ考える．

(1)⇔(2) の証：チューリング計算可能部分関数 ⇔ 部分帰納的関数 による．

(1)⇒(3) の証：M は (1) の条件をみたすとする．このとき，ビット列 x が L に属するための必要十分条件は以下で与えられる．

$$\exists z \in \{0,1\}^*\ \exists s \in \mathbb{N}\ [\ z \text{ は } M \text{ の計算過程（のコード），入力は } x\text{，出力は 1，ステップ数は } s.\ ]$$

ここで各組 (x,z,s) に対して，[ ] 内の条件はアルゴリズムによって有限時間で判定できる．そこで（$\mathbb{N}^2$ が可算無限集合であることの証明と同様にして）あらゆる組 (x,z,s) を $\{(x_i,z_i,s_i)\}_{i=0,1,2,\ldots}$ と一列に並べるアルゴリズムを用いて，以下の操作によって $f(i)$（$i = 0,1,2,\ldots$）を定める．

(x_i,z_i,s_i) が [ ] 内の条件を満たす最小の i を探し，それを i_0，$f(0) = x_{i_0}$ とする．

i_n と $f(n)$ が決まったとき，(x_i,z_i,s_i) が [ ] 内の条件を満たし，$i > i_n$ となる最小の i を探し，それを i_{n+1}，$f(n+1) = x_{i_{n+1}}$ とする．

(3)⇒(4) の証:L が全域的帰納的関数 f の像であるとする．このとき $L = \{z \in \{0,1\}^* : \exists x \in \{0,1\}^*\ f(x) = z\}$ と表せる．

(4)⇒(1) の証：ある帰納的述語 $R(-,-)$ があって，$L = \{x \in \{0,1\}^* : \exists w \in \{0,1\}^*\ R(x,w)\}$ となるとする．次のようなマシン M を考える．入力 x が与えられたとしよう．$R(x,w)$ がなりたつ w がみつかるまで，$w = 0,1,2,\cdots$ と w を一つずつ増やしていく．そのような w がみつかったとき 1 を出力して終了する．みつからなければいつまでも作業を続けていく．この M は L を半決定する．

(2)–(4) が同値であることのもう少しくわしい証明は [渡辺 1992, § 3.2] 参照．

0 型言語，句構造文法の定義は [田中 1997, § 2.4] 参照．(3) と (5) の同値性はそれほど難しくはない．本稿では略す．　□

定義 5.3 (1)–(5) のいずれかが成り立つとき，L を *recursively enumerable set* という．別名： r.e. set，computably enumerable set，c.e. set，枚挙可能集合，帰納的可算集合，再帰的可算集合．

例 任意の帰納的集合は r.e. 集合である（帰納的 ⇔ 決定するプログラムあり．決定するプログラムを改造して半決定するプログラムを作れ）．

例 [渡辺 1992, p.65] 停止問題 HALT := $\{\langle N,x\rangle : N$ は Tm（のコード）であり，入力 x に対して N は有限ステップで停止する．$\}$ は帰納的集合ではないが，r.e. 集合である．これが r.e. 集合であることを見るには，停止するための必要十分条件が以下で与えられることに注意せよ．

$$\exists y \in \{0,1\}^*\ T_1(N,x,y) = 0$$

定理 5.4 $L \subseteq \{0,1\}^*$ とその補集合がともに r.e. 集合であるとする．このとき L は帰納的集合である．

証明の概略　直観的にいうと，合格者名読み上げプログラムと不合格者名読み上げプログラムを用いて合否判定プログラムを作る．もう少し詳しくいうと次の通り．L および L の補集合を枚挙する全域的帰納的関数をそれぞれ f，g とする．入力 x が与えられたとき，$f(0), g(0), f(1), g(1), \cdots$ というように $n = 0, 1, 2, \cdots$ に対して順番に $f(n), g(n)$ を印字していき，$f(n) = x$ となる n がみつかったら 1 を出力して停止し，$g(n) = x$ となる n がみつかったら 0 を出力して停止するプログラムを考える．このプログラムは L を決定する．　□

帰納的集合全体の族を $\mathcal{REC}$，r.e. 集合全体の族を $\mathcal{RE}$ と表そう．また，補集合が r.e. であるような集合全体の族を co$\mathcal{RE}$ とする．このとき，$\mathcal{REC} = \mathcal{RE} \cap \text{co}\mathcal{RE}$ 以下が成り立つ．また，$\mathcal{REC}$，$\mathcal{RE}$，co$\mathcal{RE}$ は相異なる．

5.2　還元と完全性

二つの集合の複雑さを比較する尺度を導入しよう．直観的にいうと，B をカンニングペーパーとして用いれば A を決定できるとき，A の複雑性は B の複雑性以下であると考える．より詳しくは以下の通り．

定義 5.5 [渡辺 1992, 定義 3.4] A，B は $\{0,1\}^*$ の部分集合であるとする．

1. 次の条件をみたす関数 h を A から B への *many-one reduction*（[渡辺 1992, § 3.4] では recursive reduction）という．
   (a) h は $\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への全域的関数．
   (b) $\forall x \in \{0,1\}^*$ $[x \in A \leftrightarrow h(x) \in B]$
   (c) h は計算可能（全域的帰納的関数）．
2. 上のような h が存在するとき，「A は B へ *many-one reducible* である」といい，$A \leq_{\mathrm{m}} B$ と書く．

Many-one reduction を多対一還元，m 還元ともいう．還元の代わりに帰着と訳すこともある．$\leq_{\mathrm{m}}$ は擬順序 (pseudo ordering) である．すなわち，反射律と推移律をみたす．ただし反対称律はみたさない．たとえば，偶数（の二進表記）全体の集合と奇数全体の集合は互いに many-one reducible である．

定義 5.6 [渡辺 1992, 定義 3.5] 集合 A が　$\forall L \in \mathcal{RE}$ $L \leq_{\mathrm{m}} A$　かつ　$A \in \mathcal{RE}$　という条件をみたすとき，A を（$\leq_{\mathrm{m}}$ に関する）*r.e.-complete set*（*r.e.* **完全集合**）という．

定理 5.7 [渡辺 1992, 定理 3.15] 停止問題 HALT は r.e.-complete である．

証明の概略　L を任意の recurisively enumerable set とする．定理 5.2 により，L を半決定する Tm M がある．そのような M をひとつ固定する．$\{0,1\}^*$ から $\{0,1\}^*$ への全域的関数 h を $h(x) = \langle M, x \rangle$ と定義する．すると h は L から HALT への many-one reduction となる．　□

展望　還元に関する r.e. sets の族の構造は，数理論理学の一分野として深く研究され classical recursion theory とよばれている．その初歩的な部分は [Sh2001] 参照．20 世紀後半，還元と完全性の概念は計算時間を制限した文脈で考察され，多項式時間 m 還元に関するＮＰ完全集合が発見された．ＮＰ完全集合の概念は，工学的には「速く正確に解くプログラムを書けそうにないから要注意な問題」を見分ける基準としての意味をもつ．このような問題に対しては近似アルゴリズムなどの工夫が必要になる．また，ＮＰ完全集合の概念は暗号の安全性とも関係している．

本稿初版の執筆に際し，[田中 1997] と [渡辺 1992] を参考にした．

参考文献

[En2001] Enderton, H. B., *A mathematical introduction to logic, 2nd ed.* Academic Press (2001).

[Pa1994] Papadimitriou, C., *Computational complexity.* Addison-Wesley (1994).

[Sh2001] Shoenfield, J. R., *Recursion theory.* A K Peters (2001).

[Si2008b] Sipser, M. 著, 太田ほか 訳, 「計算理論の基礎 [原著第 2 版] 2．計算可能性の理論」．共立出版 (2008).

[荻原 2006] 荻原 光徳, 「複雑さの階層（アルゴリズム・サイエンスシリーズ—数理技法編）」．共立出版 (2006).

[鹿島 2008] 鹿島 亮, 「C 言語による 計算の理論」．サイエンス社 (2008).

[田中 1997] 田中 尚夫, 「情報の数理 計算論理入門」．裳華房 (1997).

[渡辺 1992] 渡辺治, 「計算可能性・計算の複雑さ入門」．近代科学社 (1992).

鈴木登志雄「計算可能性理論 第 I 部 計算可能性」
2012 年 9 月 初版
2019 年 3 月 1 日 改訂版 2019.03.01
2020 年 4 月 1 日 改訂版 2020.04.01，12 月 13 日 revision a